إضافي

سلم تصحيح مقرر بنى جبرية (٤)

لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر

الدورة الإضافية للعام الدراسي ٢٠١٥/٢٠١٦

السؤال الأول: 20

1) الخاصة التجميعية محققة في S

$$\forall a \in S;\ aS = S \Rightarrow \forall a \in S,\ \exists x \in S;\ ax = a \Rightarrow$$

x عنصر حيادي يميني في S

$$\forall a \in S;\ Sa = S \Rightarrow \forall a \in S,\ \exists y \in S;\ ya = a \Rightarrow$$

y عنصر حيادي يساري في S (15)

$$x = yx = y$$

أي أن S تملك عنصراً حيادياً لنرمز له بـ e

$$e \in S \ \&\ \forall a \in S;\ aS = S \Rightarrow \exists a' \in S;\ aa' = e$$
$$e \in S \ \&\ \forall a \in S;\ Sa = S \Rightarrow \exists a'' \in S;\ a''a = e$$
$\Rightarrow$ (15)

$$a'' = a''e = a''aa' = ea' = a' \Rightarrow \forall a \in S,\ \exists a' \in S;$$
$$aa' = a'a = e$$

إذن S زمرة.

السؤال الثاني: 20

بما أن a, b من S فإنه يوجد x_1, x_2, y_1, y_2 بحيث:

(5) (5)

$$a = x_1 g \ \&\ a = g y_1,\quad g = x_2 b,\quad g = b y_2$$

بالتالي فإن:

$$a = x_1 g = \underbrace{x_1 x_2}_{x} b \qquad (5) \qquad a = g y_1 = b \underbrace{y_2 y_1}_{y}$$

حل المعادلة $a = xb$ (5) وبالتالي فإن S زمرة.

أي أن $x = x_1x_2$ حل المعادلة $a = by$ و

كما أن $y = y_2y_1$

السؤال الثالث: [20]

أ- مهما يكن $x \in S$ فإن: $\rho\rho_a(x) = \rho(xa) = x\rho(a) = \rho_{\rho(a)}(x) \Rightarrow \rho\rho_a = \rho_{\rho(a)}$ (10)

ب- ليكن ρ انسحاباً يمينياً لـ S و 1 حيادياً يمينياً لـ S مهما يكن $x \in S$

فإن: $x\rho(1) = \rho(x \cdot 1) \Rightarrow \rho_{\rho(1)}(x) = \rho(x) \Rightarrow \rho_{\rho(1)} = \rho$ (10)

فالانسحاب اليميني هو انسحاب يميني داخلي.

السؤال الرابع: [20]

أ- واضح أن التطبيق λ_a هو تطبيق متباين وغامر، لتكن W مجاورة ما

للنقطة ax. بما أن G زمرة نصف طبولوجية فإنه توجد مجاورة V

للنقطة x بحيث يكون $\lambda_a(U) = aU \subseteq W$ وهذا يعني أن λ_a مستمر

وبالتالي فإن λ_a يكون هوميومورفيزماً. (10)

ب- بما أن λ_a هوميومورفيزماً وأن P مفتوحة فإن $\lambda_a(P) = aP$

مفتوحة في G، وبما أن $AP = \bigcup_{a \in A} aP$ فإن هذا الاجتماع (10)

يكون مساوياً لمجموعة مفتوحة وبالتالي AP تكون مفتوحة.

السؤال الخامس: [10]

G زمرة طبولوجية ومنه فإن كلاً من $g_1: G \times G \to G$ حيث $g_1(x,y) = xy$

و $g_2: G \to G$ حيث $g_2(x) = x^{-1}$ يكون مستمراً ولنبرهن على استمرار

التطبيق $g_3: G \times G \to G$ حيث $g_3(x,y) = xy^{-1}$.

لتكن W مجاورة العنصر xy^{-1} ⇐ توجد مجاورة U للعنصر x ومجاورة V

للعنصر y^{-1} بحيث يكون $UV \subseteq W$ (5)، V مجاورة للعنصر y^{-1} و g_2 مستمر ومنه

توجد مجاورة V_1 للعنصر y بحيث يكون $V_1^{-1} \subseteq V$ ⇐ $UV_1^{-1} \subseteq UV \subseteq W$

وبالتالي فإن g_3 يكون مستمراً. (5)

Scanned by CamScanner

السؤال السادس: ١٥

٢- أ) $g_1(1,3)=3$ ، إن أصغر مجاورة للعنصر 3 هي $\{1,2,3\}$

فإنه أصغر مجاورة للعنصر 1 هي $\{1,2\}$ وأصغر مجاورة للعنصر 3

هي $\{1,2,3\}$ وإن $g_1(\{1,2\}\times\{1,2,3\})=\{1,2,3,4,6\}\nsubseteq\{1,2,3\}$

فالدالة g_1 غير مستمرة في النقطة $(1,3)$ (5)

~~ب- إن $g_2(2)=\frac{1}{2}$ ... إن أصغر مجاورة للعنصر 2 هي $\{1,2\}$ وإن أصغر مجاورة للعنصر~~

ب) $g_2(2)=2^{-1}=\frac{1}{2}$ و $\{1,2,\frac{1}{2}\}$ مجاورة $\frac{1}{2}$ وإن أصغر مجاورة

للعنصر 2 هي $\{1,2\}$ وإن $g_2(1,2)=\{1,\frac{1}{2}\}\subseteq\{1,2,\frac{1}{2}\}$

وبالتالي g_2 مستمر في النقطة 2 (5)

د. عصام نسيم